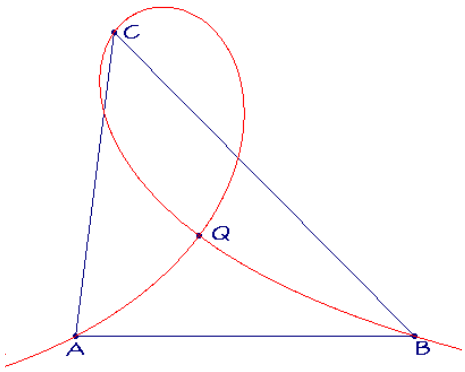
Um-Strophoiden eines Dreiecks

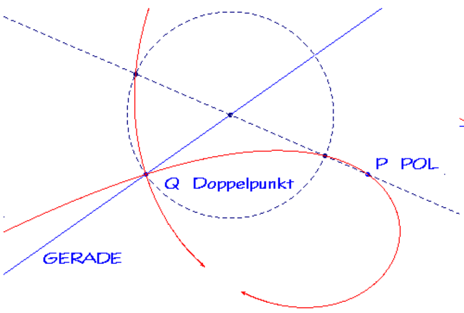
Eckart Schmidt

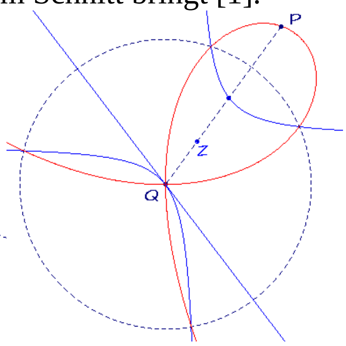
Es wird konstruktiv und analytisch untersucht, wie zu vorgegebenem Doppelpunkt einem Dreieck eine Strophoide umbeschrieben werden kann.



Geometrie der Strophoide

Eine Strophoide ist konstruktiv festgelegt durch eine Gerade q, einen Punkt Q auf dieser Geraden und einen Pol P. Punkte der Strophoide erhält man, wenn man zu einem Geradenpunkt die Verbindungsgerade zum Pol mit einem Kreis durch den Doppelpunkt Q zum Schnitt bringt [1].





Andererseits ist eine Strophoide das Inverse einer gleichseitigen Hyperbel, sofern der Mittelpunkt des Inversionskreises auf der Hyperbel liegt ([2], S.515). Dieser Mittelpunkt wird zum Doppelpunkt der Strophoide. Spiegelt man den Doppelpunkt erst am Zentrum der gleichseitigen Hyperbel und dann am Inversionskreis, erhält man den Pol.
Die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel ist in einem geeigneten kartesischen Koordinatensystem

$$x \cdot y = 1.$$

Doppelpunkt Q und Pol P liegen symmetrisch zum Zentrum.

Verschiebt man den Ursprung in den Hyperbelpunkt $Q(q;\frac{1}{q})$,

dreht das Koordinatensystem um den Winkel δ mit

$$\cot\delta = q^2,$$

so dass der Pol P auf der positiven neuen Abszissen-Achse liegt, und geht dann zu Polarkoordinaten über

$$(r\cos\varphi; r\sin\varphi) = (x-q; y-\frac{1}{q})\begin{pmatrix}\cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta\end{pmatrix},$$

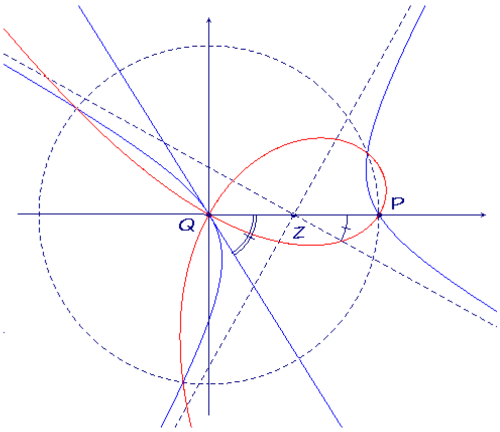
so erhält man die Gleichung

$$r(\varphi) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\delta}}\frac{\sin(\varphi+2\delta)}{\sin(2\varphi+2\delta)}.$$

Spiegelt man abschließend an einem Kreis um Q durch den Pol $P_{\varphi=0}$, so gewinnt man die Gleichung der Strophoiden zu

$$r(\varphi) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\delta}}\frac{\sin(2\varphi+2\delta)}{\sin(\varphi+2\delta)},$$

in der -2δ der Anstiegswinkel der Strophoiden-Geraden ist und $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\delta}}$ der Abstand des Pols vom Doppelpunkt.

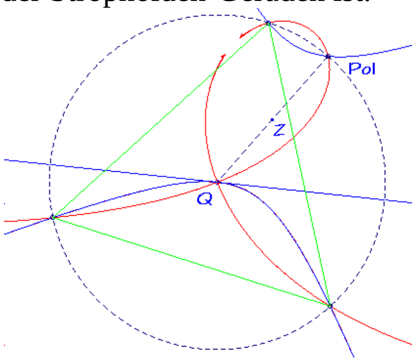


Die Strophoiden-Gerade ist dann die Tangente im Doppelpunkt an die gleichseitige Hyperbel.

Betrachtet man einen Inversionskreis durch den Pol, so schneidet dieser die Strophoide in drei weiteren Punkten P_1, P_2, P_3 mit

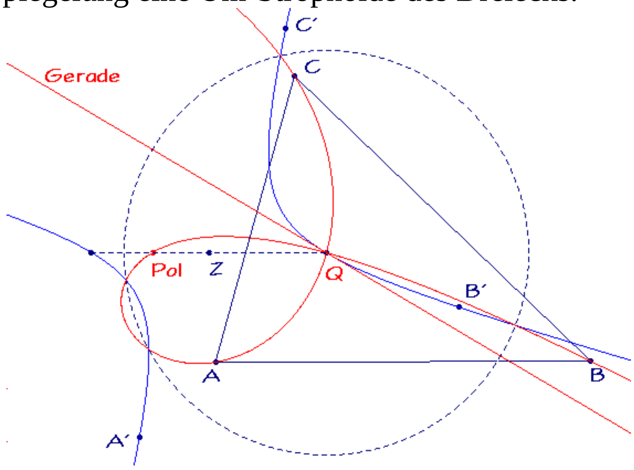
$$\varphi_i = -\frac{4\delta}{3} + \frac{(2i+1)\pi}{3},$$

die ein gleichseitiges Dreieck bilden. Bzgl. dieses Dreiecks erweist sich die Strophoide als isogonal invariant, wobei das isogonale Bild des Pols der Fernpunkt der Asymptoten bzw. der Fernpunkt der Strophoiden-Geraden ist.



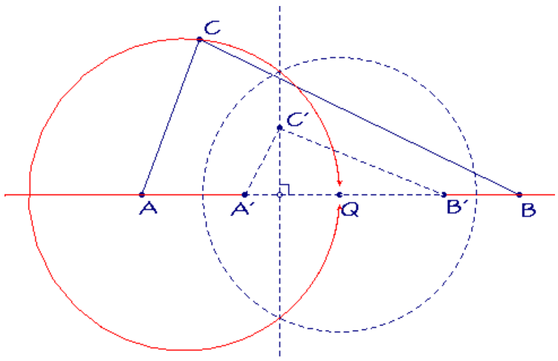
Um-Strophoiden eines Dreiecks

Nach diesen Vorüberlegungen lässt sich einem Dreieck *ABC* bei vorgegebenem Doppelpunkt *Q* wie folgt eine Strophoide umschreiben – von Sonderfällen vorerst abgesehen: Man wähle einen Inversionskreis um *Q* und spiegele die Ecken *A*, *B*, *C* des Dreiecks in *A´*, *B´*, *C´*. Jetzt betrachte man die gleichseitige Hyperbel durch *A´*, *B´*, *C´*, *Q*. Diese liefert nach Rückspiegelung eine Um-Strophoide des Dreiecks.



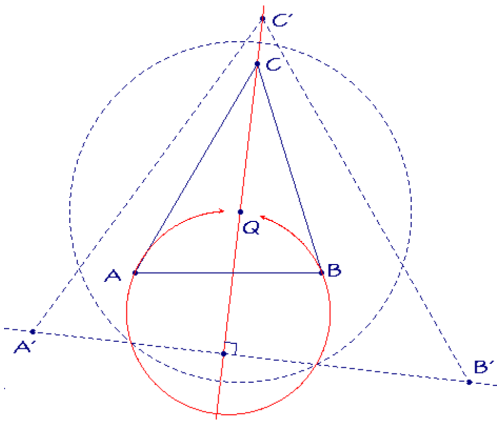
Den Pol erhält man, indem man *Q* erst am Zentrum der gleichseitigen Hyperbel und dann am Inversionskreis spiegelt. Die Strophoiden-Gerade ist die Hyperbeltangente in *Q*. – Das isogonale Bild einer Um-Strophoide ergibt wieder eine Um-Strophoide.

Entartete Um-Strophoiden

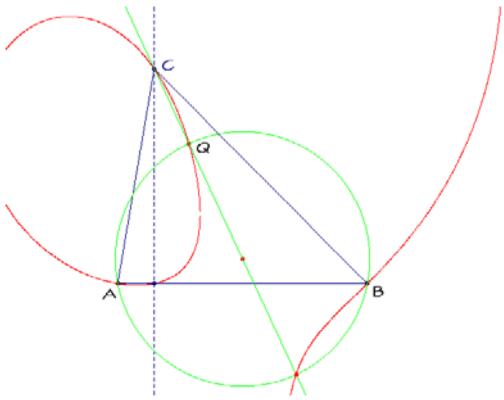


Ist *Q* ein Punkt auf der Seite *AB*, so auch auf *A´B´* und die gleichseitige Hyperbel durch *A´*, *B´*, *C´*, *Q* entartet zu einem orthogonalen Seite-Höhe-Paar im Dreieck *A´B´C´*. Nach Rückspiegelung erhält man wieder die Seite *AB* und einen symmetrischen Kreis durch *Q* und *C*.

Die gleichseitige Hyperbel der Punkte *A´*, *B´*, *C´*, *Q* entartet aber ebenso zu einem orthogonalen Seite-Höhe-Paar des Dreiecks *A´B´C´*, wenn *Q* Punkt einer Höhe dieses Dreiecks ist. Liegt *Q* z.B. auf der Höhe h_c´, so erhält man die orthogonalen Geraden *A´B´* und *QC´*, die nach Rückspiegelung die Gerade *QC* und einen dazu symmetrischen Kreis durch *Q*, *A*, *B* liefern.



Es stellt sich die Frage, für welche Punkte *Q* des Bezugsdreiecks *ABC* diese Entartung eintritt. Geht man dieser Frage mit baryzentrischen Koordinaten nach, so ergeben sich Zirkularkurven, isogonal invariant mit Pivot-Punkten in den Fernpunkten der Höhen.



Wählt man den Fernpunkt der Höhe h_c als Pivot-Punkt einer isogonal-invarianten Zirkularkurve, so lautet die Gleichung in baryzentrischen Koordinaten

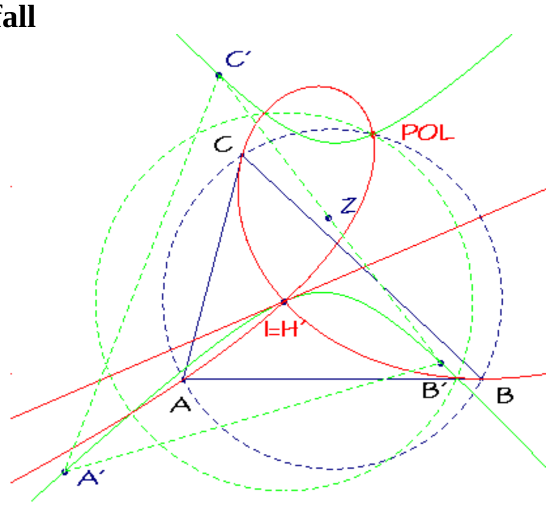
$$S_B(c^2y^2 - b^2z^2)x + S_A(a^2z^2 - c^2x^2)y + c^2(a^2y^2 - b^2x^2)z = 0\,.$$

Benutzt werden die Conway-Abkürzungen:

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \ldots \quad \mathit{und} \quad S = 2\Delta\,.$$

Für jeden Punkt *Q* einer Zirkularkurve schneiden sich die Verbindungsgerade *QC* und der Kreis *k(Q,A,B)* auf der Zirkularkurve, hier liegen diese Schnittpunkte diametral.

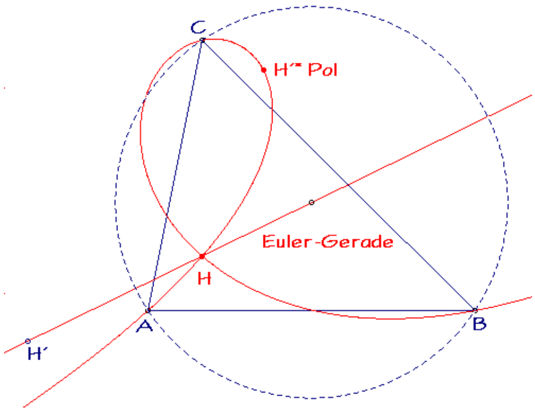
Der Spezialfall



Ist $Q=I$ die Inkreismitte des Dreiecks ABC, so ist Q gleichzeitig Höhenschnitt H' des gespiegelten Dreiecks $A'B'C'$ und jeder Kegelschnitt durch A', B', C', $Q=H'$ ist eine gleichseitige Hyperbel. Die Zentren liegen auf dem Neun-Punkte-Kreis von A´B´C´. Spiegelt man $Q=H'$ an einem Zentrum, so liegt dieser Punkt auf dem Umkreis von $A'B'C'$ und nach Rückspiegelung auf dem Umkreis von ABC. Damit ist jede Strophoide, deren Doppelpunkt die Inkreismitte ist und deren Pol auf dem Umkreis liegt eine Um-Strophoide.
Diese Um-Strophoiden mit Doppelpunkt in der Inkreismitte – sie seien als UI-Strophoiden angesprochen – erweisen sich als isogonal invariant ([3], S. 42). Damit ist das isogonale Bild des Pols der Fernpunkt der Strophoiden-Geraden durch die Inkreismitte.

Gleichungen der Um-Strophoiden

Stellt man sich der Aufgabe, die Gleichung einer Um-Strophoide zu vorgegebenem Doppelpunkt in baryzentrischen Koordinaten zu erarbeiten, so führt dies zu aufwändigen Rechnungen und das Ergebnis ist nicht zumutbar darstellbar.



Hier sei exemplarisch die Gleichung für die Strophoide der Euler-Geraden angegeben:

$$\sum_{zykl} S_A x^2[y(S^2+S_B{}^2-4S_AS_B)-z(S^2+S_C{}^2-4S_AS_C)]$$

$$=(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)xyz\,.$$

Doppelpunkt ist der Höhenschnitt H und der Pol liegt im isogonalen Bild des am Umkreis gespiegelten Höhenschnitts

$$H'^*\left(\frac{S_A}{4S_A{}^2-b^2c^2}:\frac{S_B}{4S_B{}^2-c^2a^2}:\frac{S_C}{4S_C{}^2-a^2b^2}\right)$$

mit dem ETC-Index *X265* [4]. Drei weitere Punkte sind *X316*, *X671* und

$$\left(\frac{S^2-3S_A{}^2}{S_A(S^2-S_A{}^2)}:\frac{S^2-3S_B{}^2}{S_B(S^2-S_B{}^2)}:\frac{S^2-3S_C{}^2}{S_C(S^2-S_C{}^2)}\right)$$

das isogonale Bild des Vierfach-Winkelpunktes, von dem man die Seiten unter dem Vierfachen des Gegenwinkels (mod 180°) sieht.

Für UI-Strophoiden kann eine Gerade durch die Inkreismitte vorgegeben werden, z.B. mit der Gleichung

$$\alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z = 0\,.$$

Die zugehörige UI-Strophoide mit dem Pol im Umkreispunkt

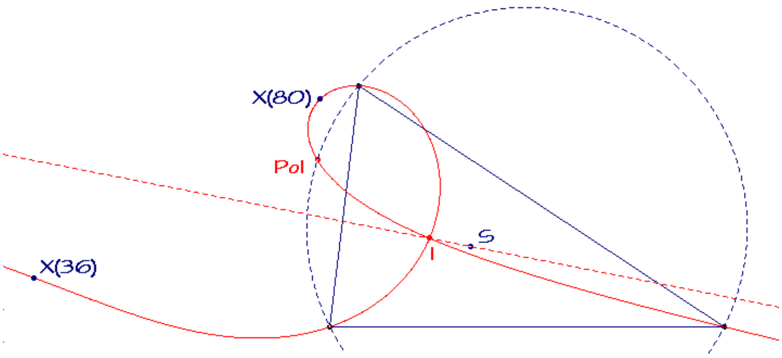
$$P(a^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) : b^2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) : c^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta))$$

hat dann die Gleichung

$$\sum_{zykl}(a\alpha - s_B\beta - s_C\gamma)x(c^2y^2+b^2z^2)$$

$$=[ab(a-b)(\alpha-\beta)+bc(b-c)(\beta-\gamma)+ca(c-a)(\gamma-\alpha)]xyz$$

mit $2s_A=-a+b+c,\ 2s_B=a-b+c,\ 2s_C=a+b-c\,.$



Ein naheliegendes Beispiel erhält man zur Verbindungsgeraden der Inkreismitte mit dem Schwerpunkt. Aus der Gleichung dieser Geraden

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$$

ergibt sich eine einfache Gleichung der UI-Strophoiden zu

$$\sum_{zykl}(b-c)x(c^2y^2+b^2z^2)=-2(a-b)(b-c)(c-a)xyz$$

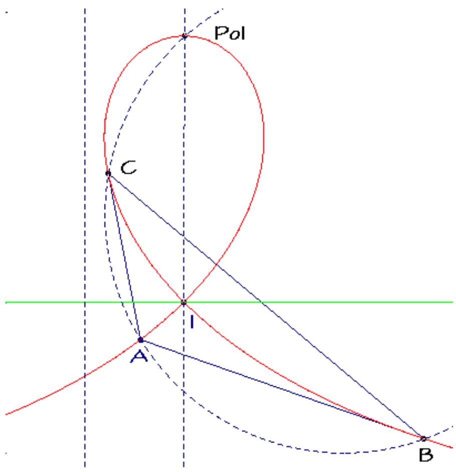
mit dem Pol

$$\left(\frac{a^2}{-2a+b+c}:\frac{b^2}{a-2b+c}:\frac{c^2}{a+b-2c}\right) \qquad \text{(ETC-Index 106).}$$

Auf dieser Um-Strophoiden liegen z.B. die am Umkreis gespiegelte Inkreismitte (*X36*) als auch die am Feuerbach-Punkt gespiegelte Inkreismitte (*X80*).

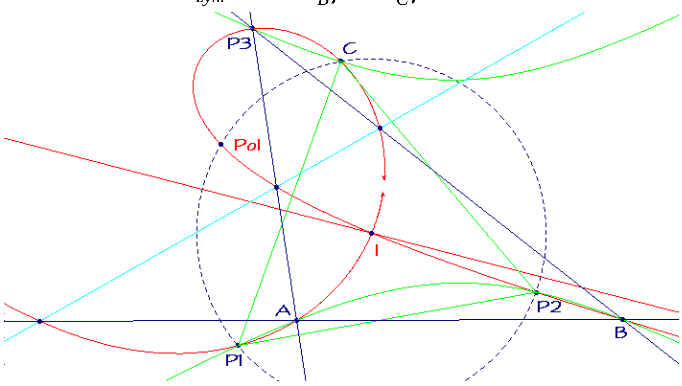
Geometrie der UI-Strophoiden

Zu einem vorgegebenen Pol *P* auf dem Umkreis lässt sich wie folgt eine UI-Strophoide konstruieren: Man spiegelt *A*, *B*, *C* an einem Inversionskreis um *I* durch den Pol *P*, betrachtet die gleichseitige Hyperbel durch die Punkte *A´*, *B´*, *C´*, *P* und erhält nach Rückspiegelung dieser Hyperbel die UI-Strophoide.
Für die Winkelhalbierenden entartet die UI-Strophoide; für Seitenparallelen fällt der Pol in die Gegenecke. Symmetrische Strophoiden erhält man für Pole, deren Wallace-Gerade parallel zu der Verbindungsgeraden mit der Inkreismitte verläuft.

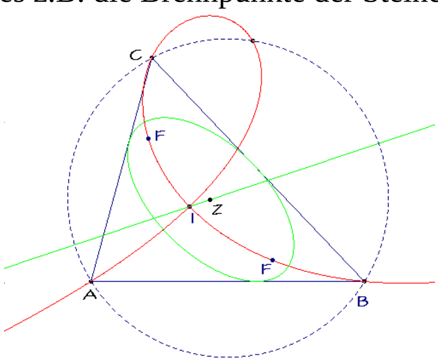


UI-Strophoiden schneiden den Inversionskreis neben dem Pol noch in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks $P_1P_2P_3$. Sie sind somit UI-Strophoiden der Dreiecke ABC und $P_1P_2P_3$ und damit isogonal invariant bzgl. beider Dreiecke. Dabei haben die Punkte A, B, C, P_1, P_2, P_3 einen gemeinsamen Umkegelschnitt. Bildet man diesen Umkegelschnitt isogonal bzgl. des gleichseitigen Dreiecks $P_1P_2P_3$ ab, so erhält man eine Gerade. Diese Gerade schneidet die Dreiecksseiten von ABC in den gleichen Punkten, in denen sie auch von der Strophoiden geschnitten werden. Damit liegen die von A, B, C verschiedenen Schnittpunkte der UI-Strophoiden mit den Dreiecksseiten kollinear auf einer Geraden mit der Gleichung

$$\sum_{zykl} \frac{x}{a\alpha - s_B\beta - s_C\gamma} = 0 \, .$$



Der wichtigste geometrische Bezug dieser UI-Strophoiden liegt sicher darin, dass sie die Ortslinien der isogonalen Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte sind ([3], S.42), deren Zentren auf der Strophoiden-Geraden liegen. Für das obige konkrete Beispiel sind dies z.B. die Brennpunkte der Steiner-Ellipse.



Literatur

[1] E. H. Loockwood: A Book of Curves. – Cambridge, At The University Press, 1961.

[2] G. Kohn: Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung. – Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III C 5. Erster Teil, B.G. Teubner, Leipzig 1898-1904.

[3] J.-P. Ehrmann, Bernard Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert.

[4] C. Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers. – http://faculty.evansvill.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de